

– Lösungen –
3. GrundlagenNetzwerke

- Elektronik für Informatiker -
von den Grundlagen bis zur Mikrocontroller-Applikation

Manfred Rost Sandro Wefel

23. November 2021

<https://doi.org/10.1515/9783110609066>

Verlag: De Gruyter Oldenbourg

© 2021
All Rights Reserved

Anmerkung: Bildnummern und Seitenzahlen beziehen sich auf die 2. Auflage des Buches.

3 Grundlagen elektrischer Netzwerke

3.1

- Ein elektrisches Netzwerk ist eine modellhafte Abbildung einer elektrischen Schaltung; es besteht aus einfachen, idealen Netzwerkelementen.
- Einfache Netzwerkelemente sind Zweipole (Widerstände, Kapazitäten, Induktivitäten, Dioden, Strom- und Spannungsquellen) und Vierpole (Transformatoren, Leitungen).
- Als Ersatzschaltung bezeichnet man ein Modell eines realen Bauelementes oder einer realen Schaltung unter Verwendung idealer Zweipole, welches sich elektrisch genau so verhält sich, wie das reale Bauelement bzw. die reale Schaltung. Beispielsweise ist ein realer Kondensator im Ersatzschaltbild durch eine Kapazität und einen Verlustwiderstand zu beschreiben.

3.2 Nach dem Satz von Helmholtz kann man ein komplexes Netzwerk auf eine Ersatzspannungsquelle und einen äußeren Serienwiderstand oder alternativ auf eine Ersatzstromquelle und einen äußeren Parallelwiderstand reduzieren. Der Satz von Helmholtz ist ein Werkzeug zur Berechnung elektrischer Netzwerke.

3.3

3.3.1 Wir nutzen die Regeln für die Reihen- und Parallelschaltung von Widerständen.

- Schaltungsvariante a)
Hier fassen wir zuerst die Widerstände R_2 und R_3 sowie R_4 und R_5 zusammen

$$R_{2,3} = R_2 + R_3 \quad \text{und} \quad R_{4,5} = R_4 + R_5,$$

berechnen dann die Parallelschaltung von $R_{2,3}$ und $R_{4,5}$

$$R_{2,3,4,5} = \frac{R_{2,3} \cdot R_{4,5}}{R_{2,3} + R_{4,5}}$$

und erhalten schließlich für den Ersatzwiderstand $R_{Ersatz/a}$

$$R_{Ersatz/a} = R_1 + R_{2,3,4,5}.$$

Mit den gegebenen Widerstandswerten erhält man

$$R_{Ersatz/a} = 1550 \Omega.$$

- Schaltungsvariante b)

Hier fassen wir zuerst die parallel geschalteten Widerstände R_2 und R_4 sowie R_3 und R_5 zusammen

$$R_{2,4} = \frac{R_2 \cdot R_4}{R_2 + R_4} \quad \text{und} \quad R_{3,5} = \frac{R_3 \cdot R_5}{R_3 + R_5}$$

und berechnen $R_{Ersatz/b}$ als Reihenschaltung von R_1 , $R_{2,4}$ und $R_{3,5}$

$$R_{Ersatz/b} = R_1 + R_{2,4} + R_{3,5}.$$

Mit den gegebenen Widerstandswerten erhält man nun

$$R_{Ersatz/b} = 1181,8 \Omega.$$

3.3.2

- Schaltungsvariante a)

$$R_{Ersatz/a} = 1550 \Omega$$

- Schaltungsvariante b)

$$R_{Ersatz/b} = 1550 \Omega.$$

- ### 3.3.3
- Den Spannungsabfall über die Reihenschaltung $R_2 - R_3$ bzw. $R_4 - R_5$ berechnen wir nach der Spannungsteilerregel

$$U_{R_2-R_3} = \frac{R_{2,3,4,5}}{R_1 + R_{2,3,4,5}} \cdot U_0.$$

Zur Berechnung der Spannung U_{x-y} ziehen wir die Überlegungen zur Brückenschaltung (Seite 86ff) heran und finden damit

$$U_{x-y} = \left(\frac{R_3}{R_2 + R_3} - \frac{R_5}{R_4 + R_5} \right) \cdot \frac{R_{2,3,4,5}}{R_1 + R_{2,3,4,5}} \cdot U_0.$$

Nach Einsetzen der Zahlen erhalten wir

- Schaltungsvariante a)

$$U_{x-y/a} = 0,29 \cdot U_0$$

- Schaltungsvariante b)

$$U_{x-y/b} = 0 \text{ V}$$

Nur in der symmetrischen (Brücken-) Anordnung liegen die Punkte x und y auf dem gleichen Potential; es fließt kein Querstrom, wenn man x und y verbindet.

- 3.4 Der Schleifer des Potentiometers greift dann die größte Spannung ab, wenn er am Ende steht und im Ausgangskreis der gesamte Potentiometerwiderstand P wirksam ist. Unter Verwendung der Regeln für die Parallelschaltung zweier Widerstände und der Spannungsteilerregel erhalten wir

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{P || R_2}{R_1 + P || R_2} = \frac{\frac{P \cdot R_2}{P + R_2}}{R_1 + \frac{P \cdot R_2}{P + R_2}}.$$

Nach Auflösen nach R_2 und Einsetzen der Werte ergibt sich

$$R_2|_{25V} = 333,33 \Omega.$$

- 3.5 Wir betrachten das Widerstandsnetzwerk von rechts beginnend und finden eine sich wiederholende Struktur:

- zwei Widerstände der Größe R in Reihe geschaltet (das ergibt einen Wert $2R$) sind zu einem Widerstand $2R$ parallel geschaltet, so dass sich wieder R ergibt.
- für die einzelnen Knoten ergibt sich damit
 - von Knoten D führen zwei Zweige nach Masse:
im rechten Zweig sind 2 Widerstände der Größe R in Reihe geschaltet, das ergibt einen Wert von $R + R = 2R$, der linke Zweig besteht nur aus dem Widerstand $2R$ die Parallelschaltung zweier Widerstände der Größe $2R$ ergibt R .
 - Knoten C: die 4 rechts von Knoten C liegenden Widerstände ergeben zusammen $2R$, die Parallelschaltung mit dem nach unten abgehenden Widerstand $2R$ das ergibt wieder R .
 - für alle weiteren Knoten ist das Verfahren analog zu wiederholen.
- Für den Gesamtwiderstand des Netzwerkes erhält man damit R .

Für die Ströme erhält man

•

$$I_0 = \frac{U_{ref}}{2R}$$

•

$$I_1 = \frac{U_{ref}}{4R} = \frac{I_0}{2}$$

•

$$I_2 = \frac{U_{ref}}{8R} = \frac{I_0}{4}$$

•

$$I_3 = \frac{U_{ref}}{16R} = \frac{I_0}{8}$$

- 3.6 Wir nutzen die Spannungsquellen-Ersatzschaltung nach Abb. 3.2 und drücken die Leerlaufspannung U_0 und die Klemmenspannung U_{Kl} mit dem ohmschen Gesetz aus

$$U_0 = I \cdot (R_i + R_a) \quad \text{und} \quad U_{Kl} = I \cdot R_a.$$

Durch Einsetzen der zusammengehörigen Wertepaare (U_{Kl1}, R_{a1}) und (U_{Kl2}, R_{a2}) erhält man zwei unabhängige Gleichungen, aus denen sich zunächst eine der gesuchten Größen bestimmen lässt. Für den Innenwiderstand erhält man

$$R_i = \frac{U_{Kl1} - U_{Kl2}}{\frac{U_{Kl2}}{R_{a2}} - \frac{U_{Kl1}}{R_{a1}}}$$

und mit den gegebenen Werten schließlich

$$R_i = 8 \Omega.$$

Zur Berechnung von U_0 nutzen wir die Ausgangsgleichungen, substituieren I

$$U_0 = \frac{U_{Kl1}}{R_{a1}} \cdot (R_i + R_{a1}).$$

und erhalten als Zahlenwert

$$U_0 = 20 \text{ V}.$$

- 3.7 Wir nutzen die Spannungsquellen-Ersatzschaltung nach Abb. 3.2, setzen $R_{Test} = R_a$ und berechnen $U_{Kl}(R_a)$ und $I(R_a)$ für die fragten Fälle

$$U_{Kl}(R_a) = U_0 \frac{R_a}{R_i + R_a} = U_0 \frac{1}{\frac{R_i}{R_a} + 1} \quad I(R_a) = \frac{U_0}{R_i + R_a}.$$

—	$R_i = 10^{-6} \Omega$		$R_i = 10^6 \Omega$	
R_a	$U_{Kl}(R_a)$	$I(R_a)$	$U_{Kl}(R_a)$	$I(R_a)$
0,1 Ω	0,999 990 V	0,999 999 A	$9,999\,999 \cdot 10^{-8}$ V	$9,999\,999 \cdot 10^{-7}$ A
1 Ω	0,999 999 V	0,999 999 A	$9,999\,990 \cdot 10^{-7}$ V	$9,999\,990 \cdot 10^{-7}$ A
10 Ω	0,999 999 V	0,099 999 A	$9,999\,900 \cdot 10^{-6}$ V	$9,999\,900 \cdot 10^{-7}$ A
100 Ω	0,999 999 V	0,009 999 A	$9,999\,000 \cdot 10^{-5}$ V	$9,999\,000 \cdot 10^{-7}$ A

- Die Quelle Q_1 ist als Spannungsquelle und Quelle Q_2 als Stromquelle zu beschreiben (vergl. dazu die Kennlinien Abb. 3.4)

- Das 230 V-Wechselstromnetz ist eine Spannungsquelle mit sehr kleinem Innenwiderstand. Der geringe Innenwiderstand garantiert, dass beim Zuschalten oder Abschalten von Verbrauchern die Netzspannung praktisch konstant bleibt.

3.8 Das Modell konzentrierter elektronischer Bauelemente versagt

- wenn eine Schaltung räumlich sehr ausgedehnt ist und
- wenn die Arbeitsfrequenz sehr hoch ist, so dass Signallaufzeiten eine Rolle spielen und die Gleichzeitigkeit von Eingangs- und Ausgangssignal nicht mehr gegeben ist.

3.9 Bei den Bemessungsgleichungen für Widerstände (Gleichung 2.22) und Plattenkondensatoren (Gleichung 2.41) hatten wir gesehen, dass deren Werte jeweils von der Länge abhängen. Analoges gilt für die Induktivität sowie für den Leitwert zwischen parallel geführten Leitern (Ableitung).

Ein differentiell kleines Leitungsstück einer homogenen Zweidrahtleitung kann man in der Ersatzschaltung nach Abb. 3.13 durch einen Vierpol darstellen. Die Schaltelemente der Ersatzschaltung sind die Längeneinheit bezogenen elektrischen Größen

- Widerstandsbelag R' ,
- Induktivitätsbelag L' ,
- Kapazitätsbelag C' und
- Ableitungsbelag G' ,

die sog. Leitungsbeläge. Die Leitungsbeläge charakterisieren verteilte Schaltelemente. Die Ausdehnung dieser Schaltelemente müssen bei großer Ausdehnung der Schaltung bzw. bei hohen Frequenzen berücksichtigt werden.

3.10 Der Wellenwiderstand \underline{Z}_0 ist eine charakteristische Größe einer Leitung; er ist unabhängig von deren Länge und berechnet sich aus den Leitungsbelägen

$$R', \quad C', \quad L' \quad \text{und} \quad G'$$

zu

$$\underline{Z}_0 = \sqrt{\frac{R' + L'}{G' + C'}}.$$

3.11 Wir benutzen hier die Näherungslösung für verlustarme Leitungen

$$\underline{Z}_0 = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$$

und erhalten

$$L' = Z_0^2 \cdot C' = 187,5 \frac{\text{nH}}{\text{m}}.$$

- 3.12 Wenn die Eingangsimpedanz des Endgerätes nicht mit dem Wellenwiderstand der Leitung übereinstimmt, wird ein Teil der ankommenden Energie reflektiert und es bildet sich eine zurücklaufende Welle aus. Man spricht von Fehlanpassung. Die Verhältnisse werden mit dem Reflexionsfaktor \underline{r} quantitativ beschrieben.

Fehlanpassung kann dazu führen, dass Signalinhalte verfälscht werden. Leitungen von Computernetzwerken müssen daher immer mit einem Abschlusswiderstand, der dem Wellenwiderstand der Leitung entspricht, abgeschlossen sein.